

# ALGUNAS CONTRIBUCIONES A LA TEORIA DE LLAMAS LAMINARES

*Comunicación presentada por los Ingenieros Aeronáuticos,  
Gregorio Millán Barbany e Ignacio Da Riva, en el II  
Congreso Internacional del ICAS celebrado en Zurich,  
Suiza, del 12 al 16 de septiembre.*

## 1. Introducción.

EL problema fundamental de la teoría de llamas laminares consiste en determinar la estructura y propiedades, en especial la velocidad de propagación, de una onda de combustión que avanza a través de una mezcla combustible homogénea en reposo, de composición y estado conocidos.

En los últimos años se han realizado importantes avances en el estudio de esta cuestión, tanto por lo que se refiere a su formulación y métodos de cálculo, como en cuanto a su aplicación a casos específicos y al desarrollo de las técnicas experimentales.

Aun cuando también se ha trabajado en el estudio de otros problemas de la teoría, tales como los de estrangulamiento, estabilidad interna, encendido y límites de inflamabilidad, sin embargo, el avance realizado en ellos ha sido, en general, considerablemente menor.

En particular, por lo que respecta a la existencia de límites de inflamabilidad, cuya causa se desconoce todavía, en 1957 D. B. SPALDING [1] propuso como explicación de los mismos la pérdida de calor que se produce en la llama, bien sea por la acción de la convección o de la radiación. El resultado más importante de su trabajo consistió en poner de manifiesto que dicha pérdida de calor puede dar lugar a la existencia de dos velocidades distintas de

propagación de la llama, las cuales se aproximan al crecer dicha pérdida de calor y coinciden para un valor límite de la misma, por encima del cual no se propaga la combustión a través de la mezcla. Según SPALDING, la menor de ambas velocidades no puede observarse habitualmente porque es inestable y el punto de coincidencia de ambas marcaría la velocidad correspondiente al límite de inflamabilidad de la mezcla. Resultados similares han sido obtenidos por VON KÁRMÁN y PENNER [2], para un modelo simplificado en el que se prescinde de la difusión y la velocidad de reacción química es constante, mientras que ZELDOVICH y BARENBLATT [3], partiendo de un régimen no estacionario y por integración numérica de las ecuaciones de la llama, han obtenido también una velocidad límite determinada por la pérdida de calor, aun cuando en sus soluciones no aparece la doble velocidad de SPALDING. Finalmente, HIRSCHFELDER [4] ha mostrado últimamente que cuando las pérdidas de calor se localizan en un estabilizador poroso situado en el límite frío de la llama, también se obtienen dos velocidades de propagación para cada valor del calor transmitido al estabilizador y ha tratado de relacionar este resultado con el de SPALDING, quien, por su parte, ha obtenido resultados experimentales [5] que parecen confirmar la existencia real de ambas velocidades.

## NOTACION

$C_p$  = calor específico a presión constante.

$D$  = coeficiente de difusión.

$E$  = energía de activación de la reacción química.

$k$  = coeficiente de pérdida de calor.

$K \equiv \frac{k}{C_p W e^{-\theta_a}} = \text{coeficiente adimensional de pérdida de calor.}$

$L \equiv \frac{\lambda}{\rho D C_p} = \text{número de LEWIS-SEMEENOV}$

$m \equiv \rho v = \text{constante} = \text{gasto másico.}$

$q$  = calor transmitido al estabilizador.

$q_l$  = pérdida de calor local.

$r$  = coeficiente de difusión lateral.

$R$  = constante molar del gas.

$T$  = temperatura.

$T_f$  = temperatura de los gases quemados.

$T_{fa}$  = temperatura de los gases quemados para llama adiabática.

$v$  = velocidad.

$w$  = velocidad de reacción por unidad de volumen.

$W$  = factor de frecuencia de la reacción química.

$x$  = coordenada normal a la onda de combustión.

$Y$  = fracción másica de productos de combustión.

$\delta \equiv \frac{q}{m C_p T_{fa}} = \text{fracción adimensional de calor transmitido al estabilizador.}$

$\gamma \equiv \frac{q}{T_{fa} \sqrt{\lambda W C_p}} = \text{calor adimensional transmitido al estabilizador.}$

$\epsilon$  = fracción de flujo de producto de combustión.

$\lambda$  = conductividad térmica.

$\rho$  = densidad.

$\Theta \equiv \frac{T}{T_{fa}} = \text{temperatura adimensional.}$

$\Theta_a \equiv \frac{E}{R T_{fa}} = \text{energía de activación adimensional.}$

$\Theta_f \equiv \frac{T_f}{T_{fa}} = \text{temperatura adimensional de los productos de la combustión.}$

$\Theta_i$  = temperatura de ignición adimensional.

$\Theta_o$  = temperatura adimensional de los gases fríos.

$\xi \equiv \frac{m C_p}{\lambda} x = \text{coordenada adimensional.}$

$\varphi \equiv m \sqrt{\frac{C_p}{\gamma W e^{-\theta_a}}} = \text{velocidad adimensional de la propagación de la llama.}$

$\kappa \equiv \frac{W}{W + r} = \text{coeficiente adimensional de difusión lateral.}$

El presente trabajo constituye un análisis teórico del problema, con objeto de esclarecer, mediante la formulación y discusión sistemática del mismo, hasta qué punto la existencia de ambas velocidades depende de la elección de las condiciones de contorno o de la utilización de los parámetros de representación adecuados.

El estudio se efectúa sobre un modelo simplificado de llama, fácilmente integrable, con dos únicas especies químicas, reactantes y productos, y en él se toman en cuenta los efectos de la difusión y la influencia de la concentración en la velocidad de reacción, pero no, al menos en forma sistemática, la de la energía de activación. Sin embargo, se deducen consecuencias cualitativas en cuanto a la influencia de la misma, sobre la base de que su presencia no altera el carácter o la multiplicidad de las soluciones.

Los casos considerados y los resultados obtenidos, son los siguientes:

1.º Llama con pérdida de calor localizada en el estabilizador. Se demuestra que la doble solución de HIRSCHFELDER se reduce a una sola, mediante la adecuada elección del parámetro de referencia, señalándose la aparente contradicción entre los resultados experimentales de SPALDING y las conclusiones teóricas.

2.º Llama con pérdida de calor distribuida. Se demuestra que las dos velocidades de SPALDING se reducen a una sola sin más que variar ligeramente las condiciones de contorno en el límite caliente, tanto cuando en el límite frío se postula una temperatura de encendido como cuando se utiliza un estabilizador de HIRSCHFELDER. El resultado es particularmente significativo cuando la energía de activación es diferente de cero, porque entonces dicha modificación se hace imperceptible y la menor de ambas velocidades es muy pequeña.

Finalmente, como una nueva causa de perturbación, se estudia, para el mismo modelo de llama, el efecto de una dilución de la mezcla producida por la difusión lateral de las especies activas, llegando a la conclusión de que tal dilución disminuye la velocidad de la llama, llegando a anularla para un valor límite del coeficiente de difusión lateral.

## 2. Llama adiabática.

Con la notación convencional que se especifica en el Anexo y suponiendo una velocidad de reacción química  $w$  de primer orden, del tipo de ARRHENIUS:

$$w = W e^{-\frac{\theta_a}{\theta}} (1 - Y); \quad [1]$$

el sistema de ecuaciones diferenciales de la llama, referido a un sistema coordenado  $\xi$  que se propaga con ella, es el siguiente:

a) Ecuación de la energía:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \theta - 1 + (1 - \theta_0)(1 - \varepsilon). \quad [2]$$

b) Ecuación de difusión:

$$\frac{dY}{d\xi} = L(Y - \varepsilon). \quad [3]$$

c) Ecuación de reacción:

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{1}{\varphi^2} e^{-\theta_a \frac{1-\theta}{\theta}} (1 - Y). \quad [4]$$

En esta última ecuación:

$$\varphi = m \sqrt{\frac{C_p}{\lambda W e^{-\theta_a}}}, \quad [5]$$

es un parámetro indeterminado que mide la velocidad de propagación de la llama en forma adimensional.

El problema consiste en determinar el valor de  $\varphi$  que permita satisfacer todas las condiciones de contorno que debe cumplir el sistema de ecuaciones de la llama, tanto en su extremo frío, como en el caliente, así como la solución del mismo correspondiente a dicho valor propio.

Como es sabido [6], para que el problema así planteado tenga solución, se hace necesario postular la existencia de una temperatura de ignición  $\theta_i$ , mayor que la de los gases frescos  $\theta_0$ , de tal modo que la velocidad de reacción química sea nula para valores de  $\theta$  inferiores a  $\theta_i$ . Si se elige el origen de distancias  $\xi$  coincidiendo con dicho punto y la onda se propaga en sentido negativo, resulta entonces que el sistema de ecuaciones anterior es solamente válido para  $\xi \geq 0$ , mientras que para  $\xi < 0$  la ecuación [4] debe reemplazarse por la siguiente:

$$\xi < 0; \quad \varepsilon \equiv 0, \quad [6]$$

con lo que desaparece la variable  $\varepsilon$  y las únicas incógnitas son  $\theta$  e  $Y$ .

Además, las soluciones correspondientes a ambas regiones deben empalmarse sin discontinuidad en el punto  $\xi = 0$  en que da comienzo la reacción química.

Con estas hipótesis, las condiciones de contorno del sistema de ecuaciones de la llama son las siguientes:

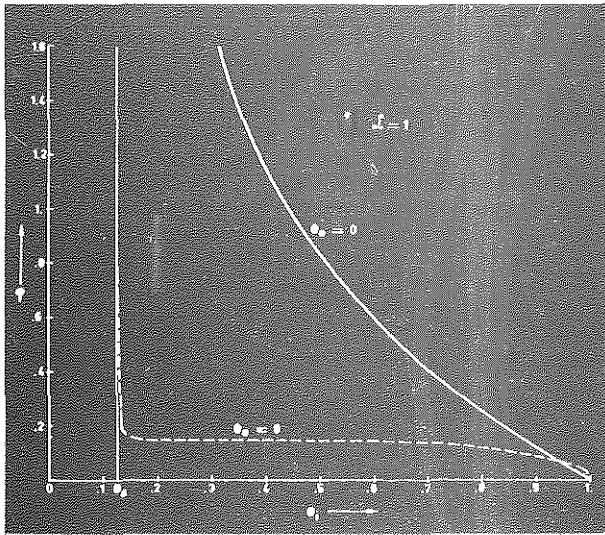


Fig. 1. — Llama adiabática. Variación de la velocidad de propagación con  $\theta_i$  para  $\theta_a = 0$  y  $\theta_a = 8$ .

En la zona de reacción  $\xi \geq 0$ :

$$\left. \begin{array}{lll} \xi = 0; & \theta = \theta_i; & \epsilon = 0; \\ \xi = \infty; & \theta = 1; & \epsilon = Y = 1. \end{array} \right\} \quad [7]$$

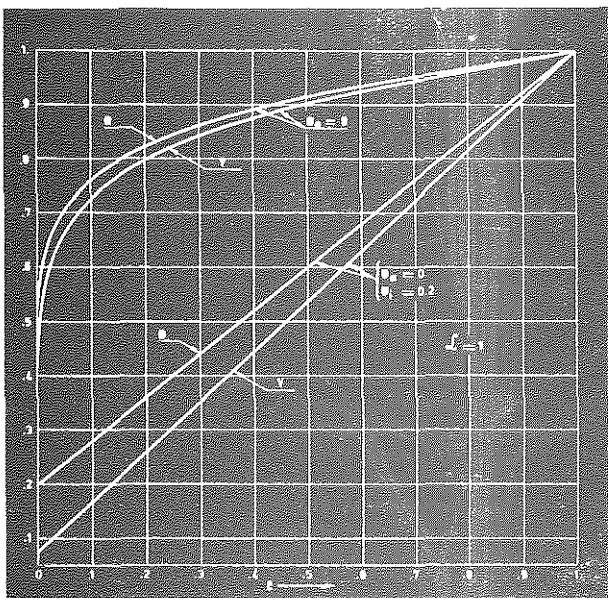
Análogamente, en la zona de calentamiento  $\xi < 0$ , las condiciones de contorno son:

$$\left. \begin{array}{lll} \xi = 0; & \theta = \theta_i; \\ \xi = -\infty; & \theta = \theta_0; & Y = 0, \end{array} \right\} \quad [8]$$

más la condición de continuidad de  $Y$  en el origen:

$$\xi = 0; \quad Y_l^- = Y_l^+. \quad [9]$$

Fig. 2. — Llama adiabática. Variación de  $Y$  y  $\theta$  con  $\xi$  para  $\theta_a = 0$  y  $\theta_a = 8$ .



La continuidad de  $\theta$  y  $\epsilon$  se satisface automáticamente, en virtud de las condiciones anteriores.

La resolución del sistema anterior determina un único valor propio de  $\varphi$  para cada valor de  $\theta_i$ .

En particular, la figura 1 muestra, en la curva de trazo continuo, la variación de  $\varphi$  con  $\theta_i$  para una reacción con energía de activación nula  $\theta_a = 0$ , en cuyo caso puede obtenerse la solución completa del sistema en forma explícita, y en la línea de trazo la correspondiente a un valor típico de la misma,  $\theta_a = 8$ , obtenida por un método semianalítico aproximado. En ella puede verse cómo la energía de activación no altera el número ni el carácter de las soluciones, y lo único que hace es determinar, entre los infinitos valores de  $\varphi$  que corresponden a los diversos valores de  $\theta_i$  cuál es el adecuado, el cual resulta ser independiente del valor desconocido de  $\theta_i$ . Análogamente, la figura 2 muestra las curvas de variación de  $Y$  y  $\theta$  en función de  $\xi$ , correspondientes a las soluciones anteriores.

La existencia de una temperatura de encendido puede sustituirse, como ha hecho HIRSCHFELDER [4], por la de un estabilizador poroso situado en el límite frío de la llama  $\xi = 0$ , a la temperatura  $\theta_0$  de los gases frescos y que absorbe una cantidad indeterminada de calor  $q$ , la cual sustituye en su modelo a la temperatura desconocida de encendido. Las conclusiones que se obtienen entonces son análogas a las anteriores, de tal modo que, cuando el calor cedido al estabilizador es muy pequeño con respecto al calor liberado por la llama y la energía de activación de la reacción tiene un valor apreciable, la velocidad de la llama toma un valor determinado, que coincide con el obtenido en el modelo de la temperatura de encendido y que, como en éste, resulta independiente del calor que se cede al estabilizador.

Por el contrario, cuando el calor cedido al estabilizador es apreciable, la velocidad de propagación de la llama depende, naturalmente, de él. En este caso, HIRSCHFELDER [4] ha mostrado, recientemente, que, además, existen dos velocidades de propagación de la llama distintas para cada valor de  $q$ , y ha tratado de relacionar este fenómeno con la duplicidad de velocidades obtenida por SPALDING [1] y por VON KÁRMÁN y PENNER [2] en el caso de una pérdida de calor distribuida a lo largo de la llama. En el párrafo siguiente se estudia este caso y se pone de manifiesto que la duplicidad de soluciones se debe a una inadecuada elección del parámetro de referencia. En los párrafos siguientes se muestra, además, que los casos de pérdida localizada y distribuida son esencialmente distintos, por lo que no puede justificarse uno de ellos mediante el otro.

### 3. Llama con pérdida de calor localizada en el límite frío.

En este caso, la ecuación [2] del sistema de la llama debe reemplazarse por la siguiente:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \theta - 1 + (1 - \theta_0)(1 - \epsilon) + \delta, \quad [10]$$

subsistiendo invariables las ecuaciones (3) y (4).

En (10), el parámetro  $\delta$  es una medida adimensional del calor cedido al estabilizador por unidad de superficie y por unidad de tiempo, definida por la siguiente expresión:

$$\delta \equiv \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=0} \equiv \frac{q}{m C_p T_{fa}}, \quad [11]$$

es decir, el calor  $q$  referido a la entalpía térmica transportada por los gases quemados de la llama adiabática, por unidad de superficie y por unidad de tiempo. Es evidente que  $\delta$  resulta ser el parámetro significativo para el proceso, puesto que mide la fracción que se cede al estabilizador del calor liberado en la combustión, fracción que es lo que importa. Este parámetro  $\delta$  juega aquí el mismo papel que el  $\theta_i$  del modelo anterior.

Las condiciones de contorno correspondientes al modelo de HIRSCHFELDER son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{lll} \xi = 0; & \theta = \theta_0; & \epsilon = 0; \\ \xi = \infty; & \theta = 1 - \delta; & \epsilon = Y = 1. \end{array} \right\} \quad [12]$$

La resolución del sistema anterior determina aquí también, como en el caso de  $\theta_i$ , un único valor de  $\varphi$  para cada valor de  $\delta$ . En particular, para una energía de activación nula, en cuyo caso se puede obtener también la solución exacta del sistema de la llama en forma explícita, el valor de  $\varphi$  correspondiente a cada valor de  $\delta$  está dado por la expresión siguiente:

$$\sqrt{1 + \frac{4}{\varphi^2 L}} = 1 + \frac{2}{L} \frac{\delta}{1 - \delta - \theta_0}. \quad [13]$$

Análogamente a lo que se hizo en el caso de la llama adiabática, en las figuras 3 y 4 se han representado los valores de  $\varphi$  en función de  $\delta$  y los de  $\theta$  e  $Y$  en función de  $\epsilon$ , respectivamente. También aquí se ve cómo la presencia de una energía de activación distinta de cero no altera ni el carácter ni el número de las soluciones y lo único que hace, como ya se ha dicho, es determinar el valor de  $\varphi$  correspondiente al modelo adiabático  $\delta \ll 1$ .

Así, pues, aparece clara la existencia de una única velocidad de propagación de la llama para cada

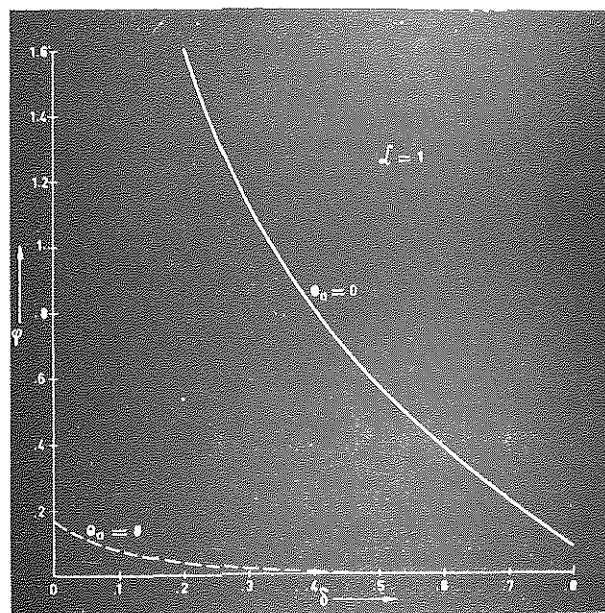
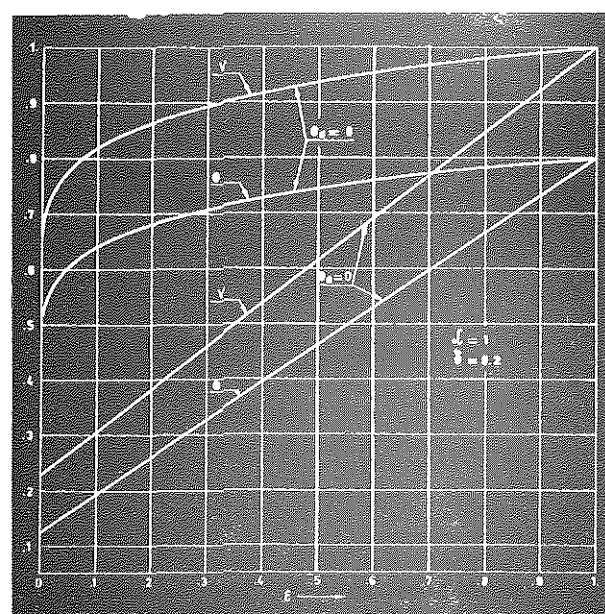


Fig. 3. — Llamas con pérdidas de calor localizadas. Variación de la velocidad de propagación con  $\delta$  para  $\theta_a = 0$  y  $\theta_a = 8$ .

fracción del calor liberado por la misma que se cede al estabilizador.

Si a partir de los resultados anteriores se quieren obtener las dos velocidades de HIRSCHFELDER, bastará con representarlos no en función de  $\delta$ , sino del calor  $q$  cedido al estabilizador, o bien en función de una medida adimensional del mismo que no

Fig. 4. — Llama con pérdidas de calor localizadas. Variación de  $Y$  y  $\theta$  con  $\epsilon$  para  $\theta_a = 0$  y  $\theta_a = 8$ .



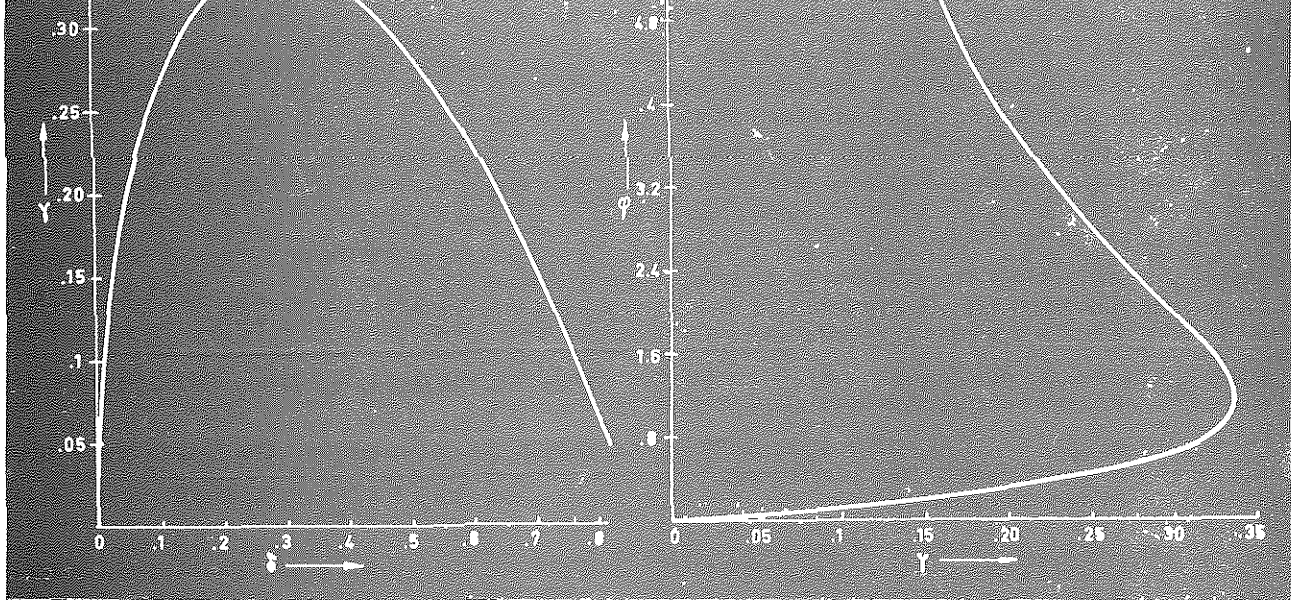


Fig. 5.—Llama con pérdidas de calor localizadas. Explicación de la existencia de dos velocidades de propagación

haga intervenir la entalpía transportada por la llama, sino solamente magnitudes que sean independientes de su velocidad de propagación. Dicha medida adimensional independiente de  $\varphi$  es el parámetro  $\gamma$  definido por la expresión:

$$\gamma \equiv \frac{q}{T_{fa} \sqrt{\lambda C_p W}} \quad [14]$$

Fácilmente se comprueba que entre  $\gamma$ ,  $\delta$  y  $\varphi$  existe la siguiente relación:

$$\gamma \equiv \delta \varphi, \quad [15]$$

que permite expresar los resultados en función de  $\gamma$  a partir de las soluciones anteriores. Tales resultados, para  $\theta_a = 0$ , se dan en la figura 5, donde puede verse que los dos valores de la velocidad de la llama correspondientes a cada valor del calor  $\gamma$  cedido al estabilizador son consecuencia de los dos valores de éste correspondientes a cada valor de  $\delta$ .

Ultimamente SPALDING [6] ha dado a conocer los resultados experimentales de las mediciones efectuadas con un estabilizador poroso que trata de realizar físicamente el modelo de HIRSCHFELDER, ob-

teniendo, al parecer, dos velocidades de propagación de la llama distintas para cada valor de la fracción de calor cedida al estabilizador. En esencia, sus gráficos, contrariamente a los de HIRSCHFELDER, equivalen a una representación de  $\varphi$  en función de  $\delta$ , por lo que la duplicidad de soluciones que muestran, caso de existir realmente, no puede atribuirse, como pretende SPALDING, a la acción del calor cedido al estabilizador, ya que, en tal caso, la solución debería ser única, según se ha visto.

Por otra parte, la incuestionable duplicidad de soluciones que obtiene HIRSCHFELDER cuando la velocidad de la llama se representa en función de  $\gamma$ , en la que nada hay sorprendente, como se ha visto, tiene muy poco de común con la duplicidad que también resulta en el caso de pérdida de calor distribuida a lo largo de la llama, por lo que la verificación experimental de aquélla no sirve para justificar la existencia de dos velocidades en este último caso, la cual, como se muestra en el número siguiente, es realmente muy dudosa, pues basta una ligera modificación de las condiciones en el límite caliente, imperceptible en las llamas con energía de activación apreciable, para que las dos soluciones se reduzcan a una sola.



#### 4 Pérdidas de calor distribuidas a lo largo de la llama.

Sea  $T_f$  la temperatura final de la llama y supongamos que la pérdida local  $q$ , por unidad de longitud y por unidad de tiempo, debida, por ejemplo, al transporte lateral de calor o a la radiación, sea de la forma:

$$q = k(T - T_f), \quad [16]$$

en donde  $k$  es un coeficiente constante.

En este caso la ecuación [1] del sistema de la llama debe sustituirse por la siguiente:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \theta - 1 + (1 - \theta_0)(1 - \varepsilon) + \frac{K}{\varphi^2} \int_{\xi_0}^{\xi} (\theta - \theta_f) d\xi, \quad [17]$$

mientras que las ecuaciones [2] y [3] subsisten invariables.

En la ecuación [17],  $K$  es un coeficiente adimensional de pérdida de calor, que está dado por la expresión:

$$K = \frac{k}{W e^{-\theta_a} C_p}, \quad [18]$$

y  $\xi_0$  es el punto en que se inicia la pérdida. Por ejemplo, si la temperatura final coincide con la de los gases frescos y la pérdida tiene lugar en toda la llama, único caso considerado por SPALDING, entonces es:

$$\theta_f = \theta_0; \quad \xi_0 = -\infty.$$

En cuanto a las condiciones de contorno, las correspondientes al límite frío son las mismas del caso adiabático, mientras que las del límite caliente han de sustituirse por las siguientes:

$$\xi = \infty; \quad \theta = \theta_f; \quad Y = \varepsilon = 1. \quad [19]$$

Como resulta fácilmente de [17], entre  $\theta_f$  y el calor total perdido por la llama existe la siguiente relación:

$$\theta_f = 1 - \frac{K}{\varphi^2} \int_{\xi_0}^{\infty} (\theta - \theta_f) d\xi. \quad [20]$$

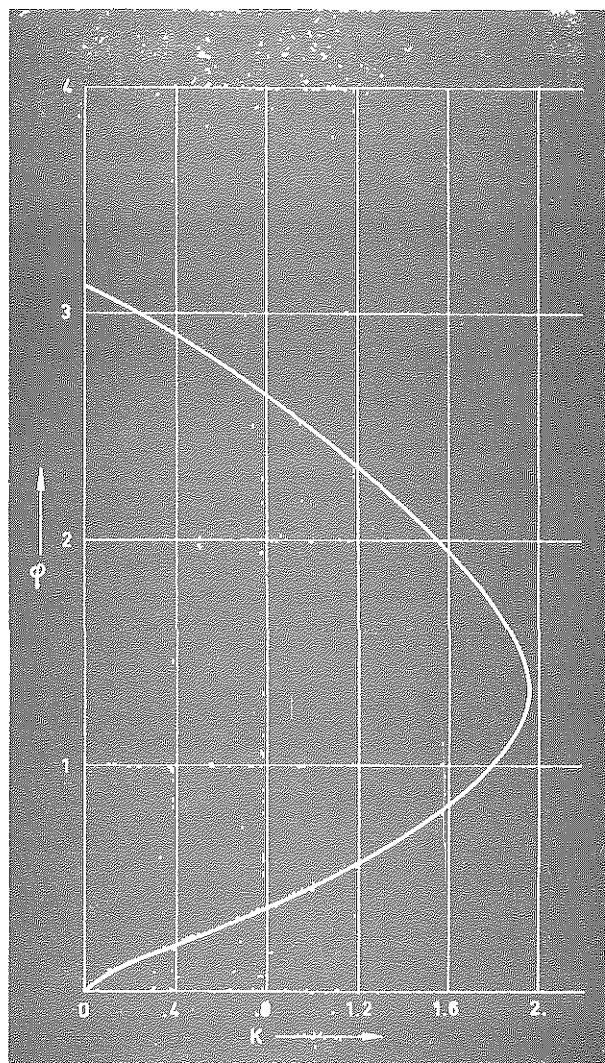
Análogamente a lo que ocurre en los casos anteriores, también en éste, cuando la energía de activación es nula, pueden obtenerse soluciones exactas en forma explícita, las cuales permiten discutir fácilmente los resultados y extender las conclusiones al caso en que aquella sea distinta de cero, pues el valor de la energía de activación no altera, como se ha visto, ni el número ni el carácter de las soluciones que resultan para  $\theta_a = 0$ . A continuación se ob-

tienen tales soluciones para los dos casos de mayor interés en que la temperatura final coincide, respectivamente, con la de los gases frescos  $\theta_0$ , caso de SPALDING y von KÁRMÁN, y con la temperatura de ignición  $\theta_i$ .

a)  $\theta_f = \theta_0$ . — En este caso la resolución del sistema de ecuaciones de la llama muestra que para cada valor del coeficiente de pérdida de calor  $K$  existen dos valores distintos de la velocidad  $\varphi$ , los cuales están dados por la ecuación:

$$\frac{u \sqrt{1 + \frac{4K}{\varphi^2}} + (L-1)u - L}{[K + (L-1)u - L] \sqrt{1 + \frac{4K}{\varphi^2}}} = \frac{\theta_i - \theta_0}{1 - \theta_0}, \quad [21]$$

Fig. 6. — Llama con pérdidas de calor distribuidas. Variación de la doble velocidad de propagación con  $K$ , para una temperatura final igual a  $\theta_0$ .



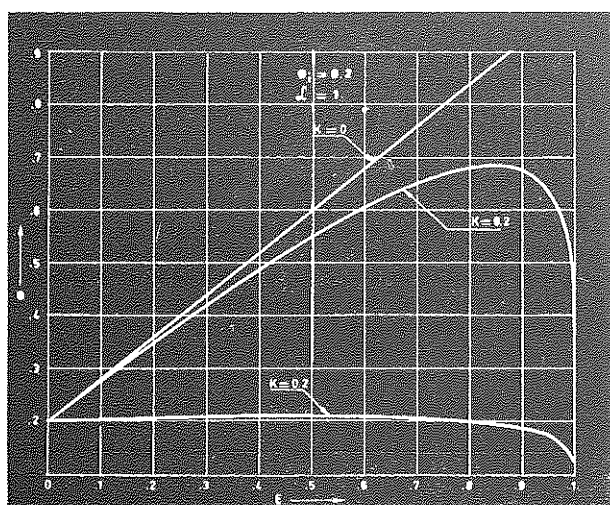


Fig. 7. — Llama con pérdidas de calor distribuidas. Variación de  $\theta$  con  $\varepsilon$  para una temperatura final igual a  $\theta_0$ .

siendo:

$$u = \varphi^2 L \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{\varphi^2 L}} - 1}{2} \quad [22]$$

Contrariamente a lo que ocurría en el caso de la pérdida de calor localizada en el estabilizador, las dos velocidades correspondientes a cada valor del coeficiente de enfriamiento no puedan producirse a una sola mediante una adecuada definición de éste. Para lograrlo es necesario suponer que la pérdida se produce según un mecanismo distinto que haga depender el valor de  $k$  del de  $m$ , es decir, de la velocidad de la llama.

Las figuras 6 y 7 muestran los resultados correspondientes a un caso típico.

Las conclusiones anteriores subsisten, tanto si se supone que la pérdida de calor se produce solamente en la zona de reacción  $\xi \geq 0$  como si tiene lugar a lo largo de toda la llama.

b)  $\theta_f = \theta_i$ . — Cuando la temperatura de los gases quemados coincide con la ignición, se comprueba que, contrariamente a lo que ocurre en el caso anterior, a cada valor del coeficiente de pérdida de calor corresponde una única velocidad de propagación de la llama, la cual está dada por el sistema:

$$\frac{\frac{K}{u}}{\frac{K}{u} - \left(1 + \frac{u}{\varphi^2}\right)} \left[ 1 - \frac{2 \frac{u}{\varphi^2}}{\sqrt{1 + \frac{4K}{\varphi^2}} - 1} \right] = \frac{1 - \theta_i}{1 - \theta_0}; \quad [23]$$

$$u = \frac{\varphi^2 L}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{4}{\varphi^2 L}} - 1 \right]. \quad [24]$$

Las figuras 8 y 9 muestran los resultados correspondientes a este caso. En ellas se han incluido

de trazos, para comparación, las dos soluciones correspondientes al caso  $\theta_f = \theta_0$ .

Las conclusiones precedentes subsisten íntegramente, como puede comprobarse fácilmente, cuando se prescinde de los efectos de la difusión y de la influencia de la concentración en la velocidad de reacción, suponiéndola constante, como se ha hecho en trabajos anteriores ya mencionados. Asimismo se comprueba que cuando es  $\theta_f = \theta_i$ , existen dos velocidades de la llama, reduciéndose a una sola para  $\theta_f = \theta_i$ .

El interés de estas conclusiones radica en el hecho de que una ligera modificación en las condiciones de contorno en el límite caliente, puesto que  $\theta_i$  se puede elegir arbitrariamente próximo a  $\theta_0$ , reduce a una sola las dos velocidades de propagación, lo cual invalida considerablemente el interés práctico de la doble solución, especialmente cuando se toma en cuenta la influencia de la energía de activación, pues en tal caso, si bien la velocidad mayor de las dos correspondientes a cada valor de  $K$  para  $\theta_f = \theta_0$ , única observada experimentalmente con plena seguridad, resulta independiente de  $\theta_i$ , como en el caso adiabático, no sucede así con la menor, que habrá de ser del orden de magnitud de:

$$e^{-\frac{\theta_a}{2} \frac{1 - \theta_i}{\theta_i}}.$$

Fig. 8. — Llama con pérdidas de calor distribuidas. Variación de la única velocidad de propagación con  $K$ , para una temperatura final igual a  $\theta_i$ .

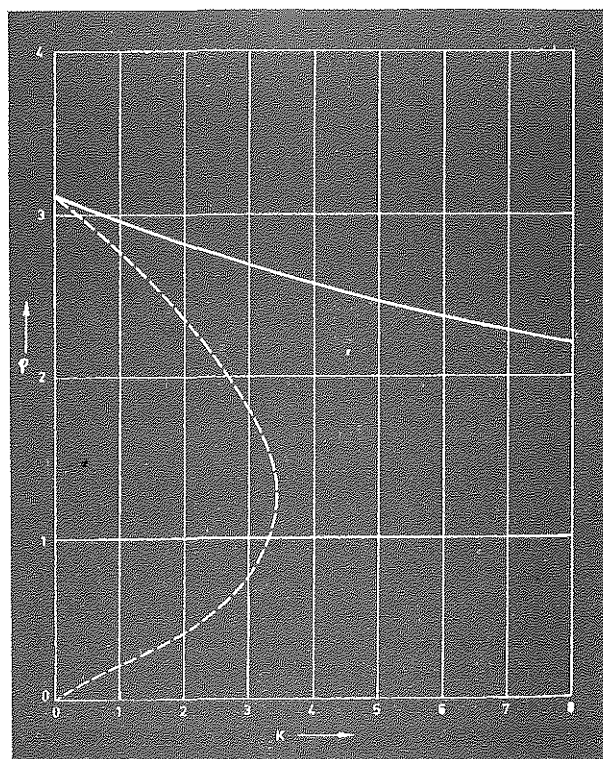
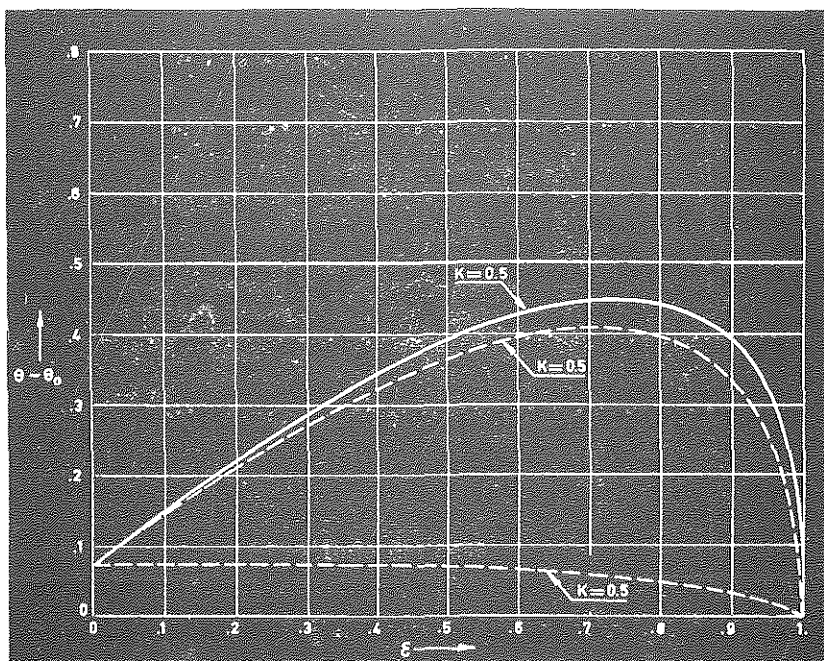




Fig. 9. — Llama con pérdidas de calor distribuidas. Variación de  $\theta$  con  $\varepsilon$  para una temperatura final igual a  $\theta_i$ .



A la vista de tales conclusiones parece necesario descartar la pérdida distribuida de calor como causa de la existencia de límites de inflamabilidad, buscando otra explicación para los mismos.

##### 5. Llama con difusión lateral.

Una posible causa de perturbación en el comportamiento de las llamas con respecto a la solución adiabática ideal considerada en el párrafo 2, que, al parecer, no ha sido analizada todavía, radica en la difusión lateral de especies químicas activas, las cuales se sustituyen por los gases inertes que rodean a la llama, dando lugar a una dilución de la mezcla.

Este problema puede estudiarse en forma análoga al caso anterior de pérdida de calor, sin más que sustituir el término de enfriamiento  $h(\theta - \theta_f)$  por un término de difusión lateral, cuya acción deberá incluirse, además, en la ecuación de reacción. Si se supone, como en el caso de pérdida de calor distribuida, que la pérdida local de reactantes por efecto de la difusión lateral, por unidad de longitud y unidad de tiempo es proporcional a su concentración  $r(1 - \gamma)$ , siendo  $r$  un coeficiente constante, y si además se supone que la energía de activación es nula, en cuyo caso puede obtenerse también la solución exacta del problema, las ecuaciones de la llama que se obtienen son las siguientes:

a) Ecuación de la energía:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} = \frac{d\theta}{d\xi} - (1 - \theta_0) \frac{d\varepsilon}{d\xi} + \left[ -\frac{1 - \theta_0}{\varphi^2} \frac{1 - \mu}{\mu} (1 - Y) \right] \quad [25]$$

b) Ecuación de difusión:

$$\frac{dY}{d\xi} = L(Y - \xi). \quad [26]$$

c) Ecuación de reacción:

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = \frac{1}{\mu \varphi^2} (1 - Y). \quad [27]$$

En las ecuaciones [23] y [25],  $\mu$  es una medida adimensional del coeficiente de difusión lateral, definida por la expresión:

$$\mu = \frac{W}{W + r}. \quad [28]$$

La eliminación de  $(1 - Y)$  entre [23] y [25], seguida de una primera integración del resultado, permite sustituir la ecuación de la energía por la siguiente:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \theta - \theta_0 - (1 - \theta_0) \mu \varepsilon. \quad [29]$$

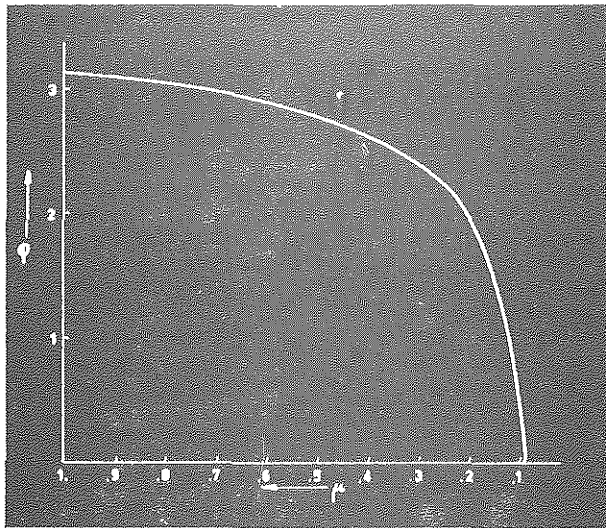


Fig. 10. — Llama con difusión lateral. Variación de la velocidad de propagación con  $\mu$  para  $\theta_a = 0$ .

Las condiciones de contorno que debe satisfacer el sistema anterior son las mismas que en el caso adiabático, excepto por lo que se refiere a la temperatura de los gases quemados, la cual, naturalmente, tiene que ser inferior a la adiabática, puesto que se pierde por difusión lateral una parte del reactante sin llegar a quemarse. Dicha temperatura,  $\theta_f$ , está relacionada con  $\mu$  por la expresión:

$$\theta_f = 1 - (1 - \theta_c)(1 - \mu). \quad [30]$$

La resolución del sistema anterior conduce a la siguiente expresión para la velocidad de la llama:

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{\mu} L} \left[ \left( 1 + \frac{\frac{2}{L}}{1 - \theta_0} \mu - 1 \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad [31]$$

En la figura 10 se ha representado la variación de  $\varphi$  en función de  $\mu$  para un caso típico.

Por consiguiente, resulta que la difusión lateral no altera la unicidad de la solución correspondiente al caso adiabático, pero reduce la velocidad de la llama al aumentar aquélla, llegando a anularla para un valor del coeficiente de difusión lateral que está dado por la expresión:

$$\mu = \frac{\theta_i - \theta_0}{1 - \theta_0}. \quad [32]$$

La figura 10 muestra la variación de  $\varphi$  con  $\mu$  en un caso típico.

#### Referencias.

1. SPALDING, D. B.: "A theory of inflammability limits and flame-quenching". *Proc. Roy. Soc.*, 240, 83
2. MULLINS, B. P., and PENNER, S. S.: *Explosions, detonations, flammability and ignition*. Agardograph 31. Pergamon Press. London, 1959.
3. ZELDOVICH, H. B., and BARENBLATT, G. I.: 'Theory of flame propagation: "Combustion and flame"', March 1959, p. 61.
4. HIRSCHFELDER, J. O., and MCCONE, A.: *Theory of flames produced by unimolecular reactions. I. Accurate numerical solutions*. "The Physics of Fluids". Septiembre-octubre 1959, p. 551.
5. SPALDING, D. B., and YUMLU, V. S.: "Experimental demonstration of the existence of two flame speeds". *Combustion and Flames*. December 1959, p. 553.
6. VON KARMAN, TH.: *The present status of the theory of laminar flame propagation*. "Sixth Symposium (international) on combustion", pp. 1-11. Reinhold Publishing Corp., 1956.